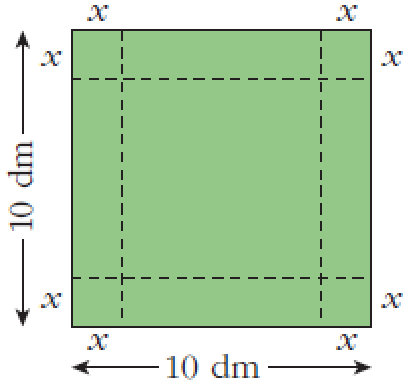
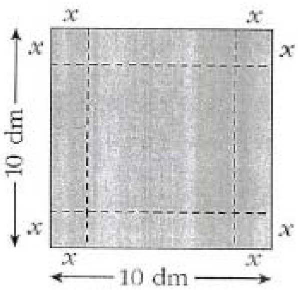
Apellidos y nombre..

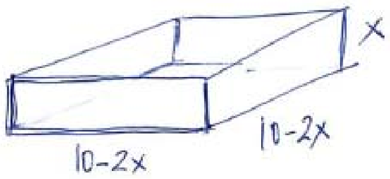
TEMAS 9 Y 10. CONTROL. APLICACIONES DERIVADA.
REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES. OPC B

1. Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices.

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.







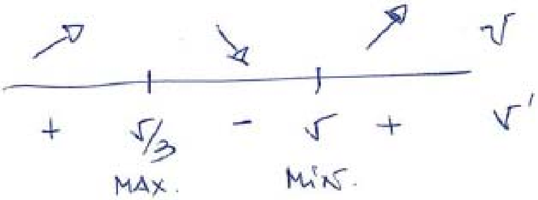
$$V = (10-2x)^2 \cdot x = (100-40x+4x^2)x =$$

$$V(x) = \boxed{100x - 40x^2 + 4x^3}$$

$$V'(x) = \boxed{100 - 80x + 12x^2} \boxed{= 0} \;;\quad 25 - 20x + 3x^2 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{20 \pm \sqrt{400-300}}{6} =$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \begin{cases} \dfrac{20+10}{6} = \boxed{5} \\[2mm] \dfrac{20-10}{6} = \dfrac{10}{6} = \boxed{\dfrac{5}{3}} \end{cases}$$



$$V'(0) = 100 > 0$$

$$V'(2) = 100 - 80 \cdot 2 + 12 \cdot 2^2 = 100 - 160 + 48 = -12 < 0$$

$$V'(6) = 100 - 80 \cdot 6 + 12 \cdot 6^2 = 100 - 480 + 432 > 0$$

Luego el máximo es para $x = \frac{5}{3}$ dm

Apellidos y nombre...

2. Dibuja la gráfica de la siguiente función hallando sus puntos significativos: cortes con los ejes, asíntotas, máximos y mínimos,...:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$$

- Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\ x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntota horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0\ \left(\text{si } x\to-\infty,\ f(x)<0\right) \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0\ \left(\text{si } x\to+\infty,\ f(x)>0\right)\end{array}\right\}\ y=0 \text{ es asíntota horizontal.}$$

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x^3-\left(x^2-1\right)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2x^4-3x^4+3x^2}{x^6}=\frac{-x^4+3x^2}{x^6}=\frac{x^2\left(-x^2+3\right)}{x^6}=\frac{3-x^2}{x^4}$$

$$f'(x)=0 \ \rightarrow\ 3-x^2=0\ \rightarrow\ x=\pm\sqrt{3}$$

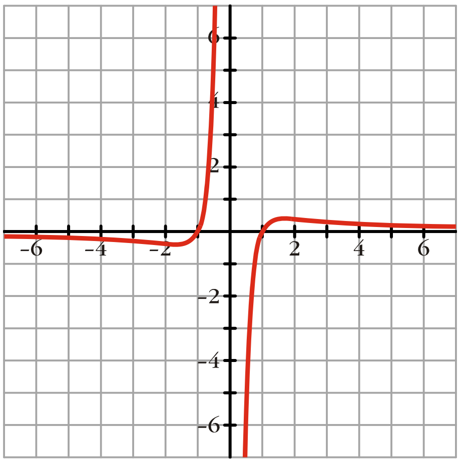
Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} f'<0 & & f'>0 & & f'>0 & & f'<0 \\ \searrow & -\sqrt{3} & \nearrow & 0 & \nearrow & \sqrt{3} & \searrow \end{array}$$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$; es creciente en $(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})$.

Tiene un mínimo en $(-\sqrt{3};-0{,}38)$ y un máximo en $(\sqrt{3};0{,}38)$.

- Cortes con los ejes:
  - No corta al eje Y, pues en $x=0$ no está definida.
  - Con el eje X $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $x^2-1=0$ $\rightarrow$ $x=\pm1$ $\rightarrow$ Puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
- Gráfica:



Apellidos y nombre..

3. Comprueba que se cumple las condiciones del teorema de Rolle para la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ en el intervalo [-1,1] y calcula el punto c, cuya existencia señala dicho teorema.

a)

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \text{ continua en } [a;b] \\ \text{derivable en } (a;b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right| \Longrightarrow \exists\, c \in (a;b) \,/\, f'(c) = 0$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \quad \text{en} \quad [-1;1]$$

Es continua. No se anula el denominador.

Es derivable: $y' = \dfrac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{2x^3+2x-2x^3-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+2}{(-1)^2+1} = \frac{3}{2} \;;\quad f(1) = \frac{1^2+2}{1^2+1} = \frac{3}{2}$$

c)

$$f'(c) = 0 \;;\quad \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \longrightarrow x = 0 \in (-1;1)$$

Apellidos y nombre..

4. Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x + sen\, x}$; b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 1} \right]$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x + sen\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1 + cos\, x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)^2\,(x+1)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)} = \dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 1} \right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x - \left(x^2 + 1\right)}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3x - 1}{\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3x}{x + x} = \dfrac{-3}{2}$